Тема № 7 «Алгебраические дроби. Преобразования рациональных выражений».

Действия с дробями:

(предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля)

1. Сложение дробей: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$
2. Вычитание дробей: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$
3. Умножение дробей: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
4. Деление дробей: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$
5. Перестановка членов пропорции: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$
6. Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$
7. Возведение дроби в степень: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Алгебраическим выражением называется выражение, составленное из конечного числа букв и чисел, соединенных знаками действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня.

Рациональным выражением (алгебраической дробью) – называют выражение, в знаменателе которого есть переменные (переменная), иначе выражение является целым.

Тождественные преобразования дробно-рациональных выражений

При выполнении тождественных преобразований алгебраических выражений необходимо знать порядок выполнения действий, действия с дробями и степенными выражениями, формулы сокращенного умножения и др.

Порядок выполнения действий:

1) действия с одночленами;
2) действия в скобках;
3) умножение или деление (в порядке появления);
4) сложение или вычитание (в порядке появления).

При тождественных преобразованиях область допустимых значений каждой из буквенных величин остается неизменной.

То есть при выполнении тождественных преобразований таких выражений надо следить за областью определения выражения, т.к. может происходить расширение области определения. Это может произойти, например, при сокращении дроби.

Пример 1. Сократить дробь: $\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$

Решение. Так область определения дроби $\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ все числа, кроме $x\neq 1$ и $x\neq -2$.

Вместе с тем $\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}$.

Сократив дробь, получим $\frac{x^2+x+1}{x+2}$.

Область определения полученной дроби: $x\neq -2$, т.е шире, чем область определения первоначальной дроби.

Поэтому дроби $\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ и $\frac{x^2+x+1}{x+2}$ равны при $x\neq 1$ и $x\neq -2$.

Ответ $\frac{x^2+x+1}{x+2}$ при $x\neq 1$ и $x\neq -2$.

Изменение области определения выражения возможно и в результате некоторых других преобразований, поэтому, выполнив преобразования выражения, нужно всегда уметь ответить на вопрос, на каком множестве оно тождественно полученному.

Пример 2. Сократить дробь: $\frac{2a^2+ab-b^2}{a+b}$.

Решение.

Область определения: a + b $\neq 0 \Rightarrow$ все числа, кроме $a = -$ b. Чтобы сократить дробь, разложим числитель на множители:

1-й способ: В числителе прибавим и вычтем одночлен ab:

$2a^2 + ab - b^2 = 2a^2 + ab - ab + ab - b^2 = (2a^2+2ab) + (-ab - b^2) = 2a(a+b) - b(a+b)$

$2a^2 + ab - b^2 = (a + b)(2a - b)$.

2-й способ: Выпишем отдельно числитель и разделим его на b^2 и разложим на множители, полученный при этом квадратный трехчлен:

$(2a^2+ab-b^2):b^2=2\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-1$. После замены t = a/b получим $2t^2+t-1$. Используя второе следствие теоремы Виета корни этого трехчлена -1 и ½.

Тогда $2t^2+t-1=2(t+1)(t-\frac{1}{2})=(t+1)(2t-1)$. Сделав обратную замену t = a/b, получим $2a^2 + ab - b^2 = (a + b)(2a - b)$.

Сократим дробь: $\frac{2a^2+ab-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(2a-b)}{a+b}=2a-b$.

Ответ $2a$ – b, при $a \neq$ - b.

Пример 3. Сократить дробь: $\frac{a^2-9}{a+3}=\frac{(a-3)(a+3)}{a+3}=a-3$

Ответ $a - 3$.

Пример 4. Упростить: $\frac{6}{x-5}+\frac{2}{5-x}=\frac{6}{x-5}-\frac{2}{x-5}=\frac{4}{x-5}$

Ответ 4/(x – 5).

Пример 5. Упростить: $\frac{3y^2-6y}{y^2-4}=\frac{3y(y-2)}{(y-2)(y+2)}=\frac{3y}{y+2}$

Ответ 3y/(y + 2).

Пример 6. Упростить: $\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x}=\frac{2-4x}{x^2}$

Ответ (2 – 4x)/ x^2.

Пример 7. Упростить: $\frac{x^2-5x}{x^2-25}\div x^2=\frac{x(x-5)}{(x-5)(x+5)x^2}=\frac{1}{x(x+5)}$

Ответ $\frac{1}{x(x+5)}$.

Пример 8. Упростить: $\left(\frac{x}{2y}\right)^3\cdot\frac{8y^3}{3x}=\frac{x^2}{3}$

Ответ x^2/3.

Пример 9. Доказать тождество:

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right)\div\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)+\frac{8a^2}{2a+b}=2a$$

Решение.

Доказать тождество — значит установить, что при всех допустимых значениях переменных его левая и правая части представляют собой тождественно равные выражения. В алгебре тождества доказывают различными способами:
1) выполняют преобразования левой части и получают в итоге правую часть;
2) выполняют преобразования правой части и получают в итоге левую часть;
3) по отдельности преобразуют правую и левую части и получают и в первом и во втором случае одно и то же выражение;
4) составляют разность левой и правой частей и в результате ее преобразований получают нуль.
Какой способ выбрать — зависит от конкретного вида тождества, которое вам предлагается доказать. В данном примере целесообразно выбрать первый способ.

Для преобразования рациональных выражений принят тот же порядок действий, что и для преобразования числовых выражений. Это значит, что сначала выполняют действия в скобках, затем действия второй ступени (умножение, деление, возведение в степень), затем действия первой ступени (сложение, вычитание).

Решение.

1) $\dfrac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2} = \dfrac{4a^2+2ab-4a^2}{(2a+b)^2} = \dfrac{2ab^2}{(2a+b)^2}$

2) $\dfrac{2a}{4a^2-b^2} + \dfrac{1}{b-2a} = \dfrac{2a}{(2a-b)(2a+b)} - \dfrac{1^{\backslash 2a+b}}{b-2a} = \dfrac{2a-(2a+b)}{(2a-b)(2a+b)} =$

$= \dfrac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)} = \dfrac{-b}{(2a-b)(2a+b)}$

3) $\dfrac{2ab}{(2a+b)^2} \div \dfrac{-b}{(2a-b)(2a+b)} = -\dfrac{2ab(2a+b)(2a-b)}{(2a+b)^2 b} = -\dfrac{2a(2a-b)}{2a+b} =$

$= -\dfrac{(4a^2-2ab)}{2a+b} = \dfrac{2ab-4a^2}{2a+b}$

4) $\dfrac{2ab-4a^2}{2a+b} + \dfrac{8a^2}{2a+b} = \dfrac{2ab-4a^2+8a^2}{2a+b} = \dfrac{2ab+4a^2}{2a+b} = \dfrac{2a(b+2a)}{2a+b} = 2a$

Как видите, нам удалось преобразовать левую часть проверяемого тождества к виду правой части. Это значит, что тождество доказано. Однако напомним, что тождество справедливо лишь для допустимых значений переменных. Таковыми в данном примере являются любые значения a и b, кроме тех, которые обращают знаменатели дробей в нуль. Значит, допустимыми являются любые пары чисел $(a; b)$, кроме тех, при которых выполняется хотя бы одно из равенств:

$$2a - b = 0\ , \quad 2a + b = 0, \quad b = 0.$$

Пример 10. Доказать тождество:

$$\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy} - \frac{1}{x^2-4y^2} : \frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right) \cdot \frac{(x+2y)^2}{4y^2} = \frac{x-2y}{2xy}$$

Решение:

1) $\dfrac{1}{x^2-4y^2} : \dfrac{x+2y}{(2y-x)^2} = \dfrac{1 \cdot (2y-x)^2}{(x-2y)(x+2y) \cdot (x+2y)} = \dfrac{(x-2y)^2}{(x-2y)(x+2y)^2} = \dfrac{x-2y}{(x+2y)^2}$

2) $\dfrac{x-2y}{x^2+2xy} - \dfrac{x-2y}{(x+2y)^2} = \dfrac{x-2y}{x \cdot (x+2y)} - \dfrac{x-2y}{(x+2y)^2} = \dfrac{x^2-4y^2-x^2+2xy}{x \cdot (x+2y)^2} = \dfrac{2y \cdot (x-2y)}{x \cdot (x+2y)^2}$

3) $\dfrac{2y \cdot (x-2y)}{x \cdot (x+2y)^2} \cdot \dfrac{(x+2y)^2}{4y^2} = \dfrac{2y \cdot (x-2y) \cdot (x+2y)^2}{x \cdot (x+2y)^2 \cdot 4y^2} = \dfrac{x-2y}{2xy}$

Ответ (x – 2y)/(2xy).

Пример 11. Вместо Q подставьте такой одночлен, чтобы равенство оказалось тождеством: $\frac{1-x}{x^3}+\frac{Q}{x^2}=\frac{1}{x^3}$

1) $-x$ 2) -1 3) x 4) 1

Решение: $\frac{Q}{x^2}=\frac{1}{x^3}-\frac{1-x}{x^3}=\frac{1-1+x}{x^3}=\frac{x}{x^3}=\frac{1}{x^2}$

Ответ 4.

Пример 12. Упростить выражение:

$$\left(\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{a^2+5a+6}\right)^2\cdot\frac{(a-3)^2+12a}{2}$$

Решение:

Область определения выражения: $a^2+3a+2\neq 0$, $a^2+4a+3\neq 0$, $a^2+5a+6\neq 0$.

Используя второе следствие теоремы Виета, найдем значения a, при которых трехчлены обращаются в нуль:

$a^2+3a+2=0$ при $a_1=-2$, $a_2=-1$

$a^2+4a+3=0$ при $a_1=-3$, $a_2=-1$

$a^2+5a+6=0$ при $a_1=-3$, $a_2=-2$

Таким образом, область определения выражения – все числа, кроме $a\neq-2$, $a\neq-1$, $a\neq-3$

Разложим трехчлены на множители:

$a^2+3a+2=(a+2)(a+1)$

$a^2+4a+3=(a+3)(a+1)$

$a^2+5a+6=(a+3)(a+2)$

Тогда общий знаменатель скобки равен: $(a+2)(a+3)(a+1)$.

$$=\left(\frac{1}{(a+2)(a+1)}^{\backslash a+3}+\frac{2a}{(a+3)(a+1)}^{\backslash a+2}+\frac{1}{(a+3)(a+2)}^{\backslash a+1}\right)^2\cdot\frac{a^2-6a+9+12a}{2}=$$

$$=\left(\frac{a+3+2a^2+4a+a+1}{(a+2)(a+3)(a+1)}\right)^2\cdot\frac{a^2+6a+9}{2}=$$

$$=\left(\frac{2a^2+6a+4}{(a+2)(a+3)(a+1)}\right)^2\cdot\frac{(a+3)^2}{2}=\frac{\left(2(a^2+3a+2)\right)^2}{(a+2)^2(a+3)^2(a+1)^2}\cdot\frac{(a+3)^2}{2}=$$

$$=\frac{4(a+1)^2(a+2)^2}{(a+2)^2(a+1)^2}\cdot\frac{1}{2}=2$$

Ответ: 2, при $a\neq-3$, $a\neq-2$, $a\neq-1$.

Пример 13. Упростить выражение $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

Решение:

Область определения: $x-y\neq 0 \Rightarrow x\neq y$; $x+y\neq 0 \Rightarrow x\neq -y$;

$x^2-y^2\neq 0 \Rightarrow x\neq y,\ x\neq -y$; $x^2+y^2\neq 0 \Rightarrow x\neq 0,\ y\neq 0$.

Итак, область определения $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x\neq y$, $x\neq -y$.

Приведем дроби, стоящие в скобках к общему знаменателю и воспользуемся формулами сокращенного умножения.

$$\left(\frac{x+y}{x-y}^{\backslash x+y}-\frac{x-y}{x+y}^{\backslash x-y}\right)\div\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}^{\backslash x^2+y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}^{\backslash x^2-y^2}\right)=$$

$$=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}\div\frac{\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}=$$

$$=\frac{(x+y-x+y)(x+y+x-y)}{x^2-y^2}\div\frac{\left(x^2+y^2-x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+x^2-y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}=$$

$$=\frac{4xy}{x^2-y^2}\div\frac{4x^2y^2}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}=\frac{4xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{4x^2y^2}=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

Ответ $(x^2+y^2)/xy$ при $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x\neq y$, $x\neq -y$.

Пример 14. Упростить выражение

$$f(a,b,c)=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

Решение.

Найдем область определения выражения:

$a\neq 0$; $b+c\neq 0 \Rightarrow b\neq -c$; $2bc\neq 0 \Rightarrow b\neq 0,\ c\neq 0$.

Таким образом, область определения: $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $b\neq -c$.

Приведем дроби, стоящие в числителе и знаменателе первой дроби, а также сумму, стоящую в скобках, к общим знаменателям

$$f(a,b,c)=\frac{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}\cdot\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

По правилу деления дробей приведем четырехэтажную дробь к двухэтажной. В числителе второй дроби выделим полный квадрат суммы b и c

$$f(a,b,c)=\frac{(b+c+a)a(b+c)}{(b+c-a)a(b+c)}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{b+c+a}{b+c-a}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

Числитель второй дроби, воспользовавшись формулой разности квадратов, разложим на множители

$$f(a,b,c)=\frac{b+c+a}{b+c-a}\cdot\frac{((b+c)-a)(b+c+a)}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c-a)\cdot 2bc}=\frac{(b+c+a)^2}{2bc}$$

Ответ $f(a,b,c)=\frac{(b+c+a)^2}{2bc}$ при $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$, $b\neq-c$.

Пример 15. Упростить выражение $\frac{(x+2y)^3-(x-2y)^3}{(2x+y)^3+(2x-y)^3}\div\frac{3x^4+7x^2y^2+4y^4}{4x^4+7x^2y^2+3y^4}$

и найти его значение при y = 7/11, x = 5/11.

1) 1 2) 35/121 3) 1,4 4) 5/7

Решение.

Область определения выражения:

$3x^4+7x^2y^2+4y^4\neq0$; $4x^4+7x^2y^2+3y^4\neq0$; $(2x+y)^3+(2x-y)^3\neq0$.

Первые два выражения, как сумма трех неотрицательных слагаемых равны нулю только при x=0 и y=0.

Рассмотрим третье выражение

$$(2x+y)^3+(2x-y)^3=(2x+y+2x-y)((2x+y)^2-(2x+y)(2x-y)+(2x-y)^2)=$$

$$=4x(4x^2+4xy+y^2-4x^2+y^2+4x^2-4xy+y^2)=4x(4x^2+3y^2)$$

тогда $4x(4x^2+3y^2)\neq0$ когда $4x\neq0$ и $4x^2+3y^2\neq0$. Отсюда имеем $x\neq0$, $y\neq0$.

Т.о. область определения все числа, кроме $x\neq0$, $y\neq0$.

Разложим на множители числитель и знаменатель второй дроби, используя второе следствие теоремы Виета:

$3x^4+7x^2y^2+4y^4=3(x^2+y^2)(x^2+4y^2/3)=(x^2+y^2)(3x^2+4y^2)$

$4x^4+7x^2y^2+3y^4=4(x^2+y^2)(x^2+3y^2/4)=(x^2+y^2)(4x^2+3y^2)$

$$=\frac{(x+2y-x+2y)((x+2y)^2+(x-2y)(x+2y)+(x-2y)^2)}{4x(4x^2+3y^2)}\div\frac{(x^2+y^2)(3x^2+4y^2)}{(x^2+y^2)(4x^2+3y^2)}=$$

$$=\frac{4y(x^2+2xy+4y^2+x^2-4y^2+x^2-2xy+4y^2)}{4x(4x^2+3y^2)}\div\frac{(x^2+y^2)(3x^2+4y^2)}{(x^2+y^2)(4x^2+3y^2)}=$$

$$=\frac{4y(3x^2+4y^2)}{4x(4x^2+3y^2)}\div\frac{(3x^2+4y^2)}{(4x^2+3y^2)}=\frac{4y(3x^2+4y^2)}{4x(4x^2+3y^2)}\cdot\frac{(4x^2+3y^2)}{(3x^2+4y^2)}=\frac{y}{x}.$$

Подставим значения y =7/11, x = 5/11, получим: 7/11 : 5/11 = 7/5 = 1,4.

Ответ 3.

Пример 16. Упростить выражение $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$

и найти его значение при a = -5, 675; b = 1,35, c = -7, 2

1) -3,25 2) 1,25 3) 1 4) 0

Решение:

Область определения: b - c $\neq$ 0 $\Rightarrow$ b $\neq$ c; c - a $\neq$ 0 $\Rightarrow$ c $\neq$ a; a - b $\neq$ 0 $\Rightarrow$ a $\neq$ b.

Приведем дроби к общему знаменателю (b-c)(c-a)(a-b) и воспользуемся формулами сокращенного умножения.

$$\frac{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}=\frac{0}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0.$$

Ответ 4.

Пример 17. Пользуясь теоремой Виета, вычислить: $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $2x^2+6x+1=0$.

Решение.

Преобразуем исходное выражение в дробь $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}$. Числитель данного выражения может быть разложен, как сумма кубов двух выражений: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$. Выполним тождественные преобразования:

$$(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)$$

Воспользуемся теоремой Виета: $x_1+x_2=-\frac{6}{2}=-3$, и $x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}$. Поэтому, имеем:

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{x_1x_2}=\frac{(-3)\cdot\left[(-3)^2-3\cdot\frac{1}{2}\right]}{\frac{1}{2}}=(-6)\cdot\left(9-\frac{3}{2}\right)=-45.$$

Ответ -45.

Пример 18. Упростите выражение

$$\frac{x-2}{x^2-x-6}-\frac{x+2}{x^2-5x+6}.$$

Решение.

$$\frac{x-2}{x^2-x-6}-\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{x-2}{(x+2)(x-3)}-\frac{x+2}{(x-2)(x-3)}=\frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x+2)(x-2)(x-3)}=$$
$$=\frac{(x-2+x+2)(x-2-x-2)}{(x+2)(x-2)(x-3)}=\frac{2x\cdot(-4)}{(x+2)(x-2)(x-3)}=\frac{-8x}{(x+2)(x-2)(x-3)}.$$

Ответ. $\frac{-8x}{(x+2)(x-2)(x-3)}.$

Пример 19. Упростите выражение

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-6}:\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}.$$

Решение.

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-6}:\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x^2+x-6)(x^2-4x+3)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+3)(x-1)(x-3)}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2+3x+2}{x^2-9}.$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-9}.$$

Ответ.